Gymnasium Neutraubling	Grundwissen Mathematik	8. Jahrgangsstufe

Wissen und Können / Aufgaben, Beispiele und Erläuterungen

1. Funktionen

Bezeichnungen:

- **D** *Definitionsmenge*
- **x ↦ f(x)** *Funktionsvorschrift*
- **f(x)** *Funktionsterm*
- **y = f(x)** *Funktionsgleichung*
- **y** *Funktionswert* von x

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, die jedem x-Wert <u>eindeutig</u> einen y-Wert zuordnet.

D = Q

$x \mapsto x^2 - 1$

$f(x) = x^2 - 1$

$y = x^2 - 1$

$x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 8$

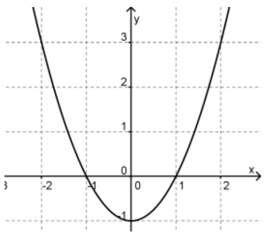
> **Aufgabe 1**: Bestimme die Funktionswerte!
> a) f(x) = 2x -1   f(0); f(-3); f(20); f(0,1)
> b) g(x) = -x²+3   g(1); g(-2); g(0); g(15)

Der **Graph einer Funktion** kann mit Hilfe einer **Wertetabelle** gezeichnet werden!

$y = x^2 - 1$

Ergänze die Tabelle :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



Hier ergibt sich als Graph eine Parabel.

W *Wertemenge* (Menge aller Funktionswerte von f)

W = [−1;+∞[(vgl. Graph)

> **Aufgabe:**
> 1c) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen für $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Schnittpunkte mit den Achsen:
- Schnittpunkt mit der y-Achse
- Schnittpunkt mit der x-Achse (= <u>Nullstelle</u>)

$y = x^2 - 1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S_y(0|-1)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (Nullstellen : x = 1 und x = −1)

→ 2 Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-1|0)$ und $N_2(1|0)$

Schnittpunkte zweier Graphen G_f und G_g: $\boxed{f(x) = g(x)}$

> **Aufgabe:**
> 1d) Bestimme den Schnittpunkt der zwei Funktionen: y = 3x - 2 und y = –x + 2.

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 1$

Ansatz: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x - 2) = 0$

→ Es gibt zwei Schnittpunkte:

S_1: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S_1(0|1)$ S_2: $x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow S_2(2|5)$

2. Lineare Funktionen y = m·x + t

Aufstellen der Gleichung einer Geraden, die durch die Punkte A und B verläuft. (y=m·x+t)

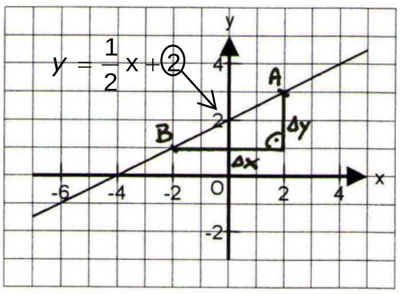
Die Graphen linearer Funktionen sind immer Geraden

Erstelle die Gleichung der Geraden AB mit A(2|3) und B(-2|1):

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{1}{2}$, dann Punkt A oder B in y = m·x + t

einsetzen. Hier B eingesetzt: $1 = \frac{1}{2}\cdot(-2) + t$ → t = 2 → $y = \frac{1}{2}x + 2$

Zeichnen von Geraden in ein Koordinatensystem mit Hilfe von **Steigung m** und **y-Achsenabschnitt t.**



Beachte: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Höhenzuwachs}}{\text{waagrechter Zuwachs}}$

> **Aufgabe 2:**
> a) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte C(3|-1) und D(-2|2).
> b) Zeichne die Graphen der Funktionen mit $y = -\frac{2}{3}x + 2$ und $y = 1{,}5x$ mit Hilfe von m und t.

3. Gleichungssysteme mit zwei Variablen

a) *Gleichsetzverfahren*

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\} 2x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{3} \Rightarrow y = \tfrac{1}{3} \quad L = \left\{\left(\tfrac{2}{3} \mid \tfrac{1}{3}\right)\right\}$$

b) *Einsetzverfahren*

(I) x - 2y = 1

<u>(II) x + 2y = 5</u>

(II) nach x aufgelöst, ergibt:

(II’) x = 5 – 2y

in (I) (5 – 2y) – 2y = 1 ⇔ y = 1

in (II’) x = 5 – 2·1 =1 ⇔ x = 3

⇒L={(3|1)}

> **Aufgabe 3a)**
> Löse das Gleichungssystem
> (I) x + 2y = 7
> (II) 3y – x = 8
> mit dem Einsetzverfahren.

c) Additionsverfahren

(I) 3x – 2y = 34
(II) x + y = 128 |·2

(II')2x + 2y = 256
(I)+(II'): 5x = 290 ⇔ x = 58
⇒ y = 128 – 58 = 70 ⇒L={(58|70)}

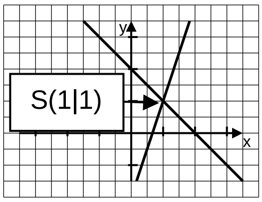
Aufgabe 3b)
Löse das Gleichungssystem
(I) 2x + 3y = 9
(II) −2x + 2y = −4
mit dem Additionsverfahren.

d) grafisches Verfahren

Der Schnittpunkt S der Graphen beider Funktionen ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

(I) y = 3x – 2
(II) y = –x +2

L = {(1|1)}



4. Bruchfunktionen der Form

$$f(x) = \frac{\pm 1}{x-a} + b$$

enthalten im Nenner die Variable x.

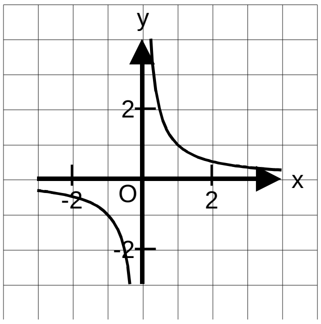
Achtung: Definitionsmenge D!

Nenner **N**ie **N**ull: D = ℚ \ {a} !

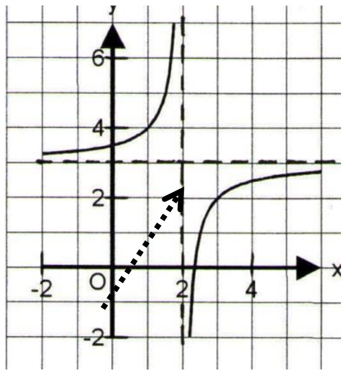
Senkrechte Asymptote bei x = a
(= Polstelle, bei der Definitionslücke)
Waagrechte Asymptote bei y = b

Die Graphen heißen **Hyperbeln**.
Den Graphen einer Bruchfunktion erhält man, indem man den Graphen von $y = \frac{1}{x}$ verschiebt bzw. an der x-Achse spiegelt (Siehe Beispiel rechts!).

$f(x) = \frac{1}{x}$ D = Q \ {0}



$g(x) = \frac{-1}{x-2} + 3$ D = Q \ {2}



Aufgabe 4) Gesucht:
Graph von $y = \frac{1}{x+1} - 2$

5. Bruchterme und Bruchgleichungen

Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen:

Beachte: Gib als Erstes die Definitionsmenge an!

1) $\frac{x^2-x}{1-x} =$ D = Q \ {1}; D bleibt bei allen Umformungen unverändert:

$$= \frac{-x(-x+1)}{1-x} = \frac{-x(1-x)}{1-x} = -x$$

2) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} =$ D =Q \ {-1;0}

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

Aufgabe 5: Vereinfache!
a) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2-x}$ b) $\frac{x}{2} - \frac{0{,}5x^2}{x+1}$

Lösen von Bruchgleichungen:

Aufgabe 5c) Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge: $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x^2 - x}$

$$\underbrace{\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7)\cdot(x+7)} \quad | \cdot(x-7)\cdot(x+7)}_{\text{„Mit dem Hauptnenner multiplizieren“ (HN-Methode)}} \quad ; \quad D=Q \setminus \{-7;+7\}$$

(x+7) – 14 = 0 ⇔ x = 7 ∉ D ⇒ L={ }, es gibt keine Lösung

6. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für $a \in$ Q \ {0} und n ∈ Z gilt:

$a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$7^0 = 1$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $(-x)^0 = 1$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$

Rechengesetze für Potenzen
($a, b \in$ Q \ {0} und m, n ∈ Z):

Potenzen mit gleicher Basis:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$6^{-3} \cdot 6^7 = 6^{-3+7} = 6^4$
$(-5)^3 : (-5)^{-2} = (-5)^{3-(-2)} = (-5)^5$
$(k^3)^{-2} = k^{3\cdot(-2)} = k^{-6}$

$(-s)^{-2} \cdot (-s)^{-5} = (-s)^{-2+(-5)} = (-s)^{-7}$
$\frac{b^2}{b^3} = b^{2-3} = b^{-1}$
$(2^{-4})^{-3} = 2^{-4\cdot(-3)} = 2^{12}$

Potenzen mit gleichem Exponenten:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$ bzw. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$5^7 \cdot 6^7 = (5 \cdot 6)^7 = 30^7$

$8^9 : 4^9 = (8 : 4)^9 = 2^9$

$(-a)^{-5} \cdot b^{-5} = (-a \cdot b)^{-5}$

$\frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$

Beachte außerdem:

$(-3)^4 = 3^4$ und $(-3)^{-4} = 3^{-4}$; $(-3)^5 = -3^5$ und $(-3)^{-5} = -3^{-5}$

$-\mathbf{3}^{\mathbf{4}} = -1 \cdot 3^4 = -(3^4) = -81 \neq (-\mathbf{3})^{\mathbf{4}} = +81$

Gleitkommadarstellung einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$:

$z = a \cdot 10^n$ mit $a \in [1;10[$ und $n \in \mathbb{Z}$

$66200000 = 6{,}62 \cdot 10^7$; $0{,}000036 = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$

7. Strahlensätze:

Werden zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt Z von zwei **Parallelen** p_1 und p_2 (die Z nicht enthalten) geschnitten, so gilt:

1.) Je <u>zwei Abschnitte auf g</u> verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf h.

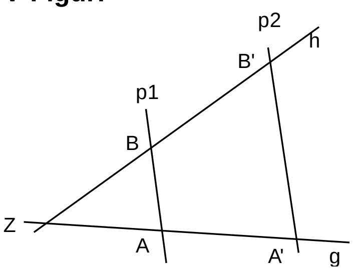
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

2.) Die <u>Abschnitte auf den Parallelen</u> verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Abschnitte auf g oder h.

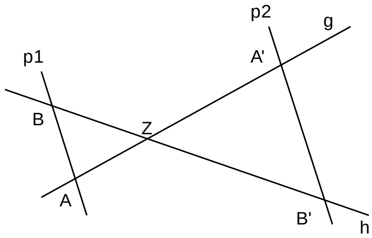
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

Dies gilt für beide Figuren!

V-Figur:

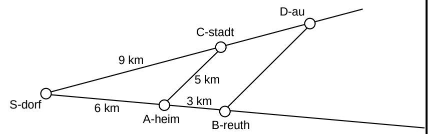


X-Figur:

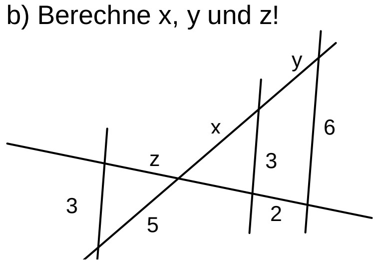


Aufgabe 7)

a) Berechne wie weit C-stadt von D-au und D-au von B-reuth entfernt sind!



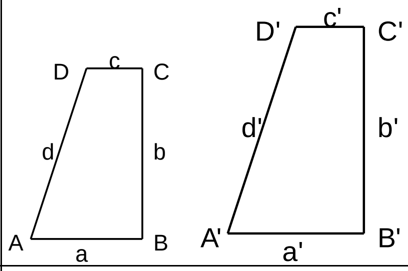
b) Berechne x, y und z!



Zueinander ähnliche Figuren stimmen in allen entsprechenden Winkeln und in allen Verhältnissen entsprechender Seitenlängen überein.

Ob zwei **Dreiecke** zueinander ähnlich sind, lässt sich mithilfe von **Ähnlichkeitssätzen** (WW -, S:S:S -, S:W:S -, S:s:W - Satz) feststellen.

„maßstäbliches Vergrößern/Verkleinern"



Strecken:

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \ldots = k$

k heißt Ähnlichkeitsfaktor.

Flächen:

$A'_{A'B'C'D'} : A_{ABCD} = k^2$

8. Zufall und Wahrscheinlichkeit

Ergebnis ω (=Versuchsausgang).

Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum Ω** zusammen.

Teilmengen des Ergebnisraumes sind **Ereignisse**. Ein *Elementarereignis* besteht aus nur einem Ergebnis.

Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P(E)** für ein Ereignis E so berechnen:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ E}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega}$$

In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4, oder 5. Diese bilden den Ergebnisraum. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ein Ereignis wäre z.B. E = {„Die Losnummer ist gerade"} = {2, 4}.
Es ist $E \subset \Omega$.
Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.

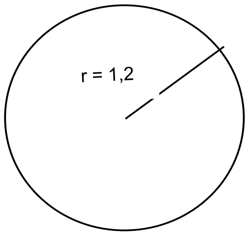
Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:

$$P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$$

9. Der Umfang u und der Flächeninhalt A eines Kreises hängen von dessen Radius r ab:

$\boldsymbol{U = 2\pi \cdot r}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A = \pi r^2}$

π heißt **Kreiszahl** und hat ungefähr den Wert: π = 3,141592654... ≈ 3,14



$u = 2\pi \cdot 1{,}2cm \approx 7{,}54cm$

$A = \pi \cdot (1{,}2cm)^2 \approx 4{,}52cm^2$

Aufgabe 9)

a) Der Umfang eines Kreises ist 7,85m. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

b) Der Flächeninhalt eines Kreise ist 12,57 cm^2. Berechne den Kreisdurchmesser!

LÖSUNGEN:

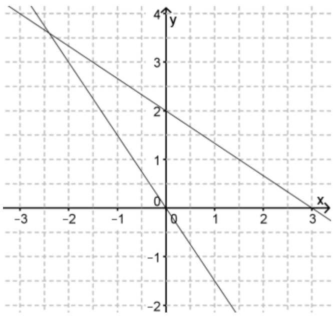
1a) f(0) = −1; f(-3) = −7; f(20) = 39; f(0,1) = −8,8
1b) g(1) = 2 ; g(-2) = −1 ; g(0) = 3; g(15) = −222
1c) $S_y(0|1)$; N(1,5|0)
1d) S(1|1)

2a) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = -\frac{3}{5}$

Setze z.B. C ein: $-1 = -\frac{3}{5}3 + t$ → t = 0,8

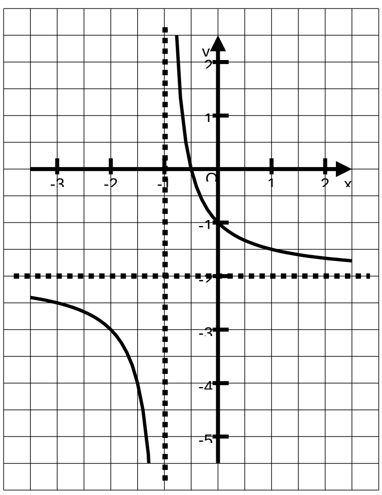
→ y = $-\frac{3}{5}$ x + 0,8

2b)



3b) y=3; x=1; L={(1|3)}
3c) y=1; x=3; L={(3|1)}

4)



5a) $\frac{2}{x-2}$ b) $\frac{x}{2(x+1)}$

5c) D = Q \ {0;1}; Hauptnenner: x² −x = x·(x−1)
Multiplikation mit HN ergibt: x²=1 ⇒ L = {-1}

7a) $\frac{3km}{6km} = \frac{\overline{CD}}{9km} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4{,}5km$;

$\frac{\overline{BD}}{5km} = \frac{6km + 3km}{6km} \Leftrightarrow \overline{BD} = 7{,}5km$

7b) $\frac{x}{5} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x = 5$; $\frac{y+5}{5} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = 5$;

$\frac{5}{5} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = 2$

9a) r = 1,25 m; A = 4,90 m
9b) r^2 = 4 cm^2; r = 2cm; d = 4cm